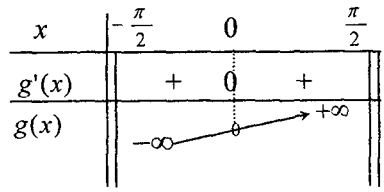

D'après le tableau des variations de g on a :

- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\ : \ g(x) < 0 \Rightarrow C_f$ est au dessous de Δ .
- $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ : \ g(x) > 0 \Rightarrow C_f$ est au dessus de Δ .
- C_f rencontre Δ au point O(0, 0).

2°/ a) f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc f est bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ où $y = g(x)$

$g'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y}$ or $y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \tan y$

$\Leftrightarrow x^2 = \tan^2 y$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

c) $\begin{cases} g(1) = x \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ donc $g(1) = \frac{\pi}{4}$.

$\begin{cases} g(\sqrt{3}) = x \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

3°/ a) Montrons que $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(-x) = g(x)$.

Soit $h(x) = g(-x)$; h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = -g'(-x) = -g'(x)$.

Soit $k(x) = -g(x)$; k est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $k'(x) = -g'(x)$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = k(x)$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(-x) = -g(x)$ ce qui prouve que g est impaire.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1$ car $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.